

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

**МАТУРСКИ РАД
из предмета физика**

Магнетна левитација

Ученик:
Огњен Марковић IVд

Ментор:
Филип Вукајловић

Београд, јун 2011

Садржај

1. Увод.....	3
2. Теоријски увод	5
2.1 Ерншуова теорема	5
3. Дијамагнетна левитација	7
3.1 Увод у дијамагнетну левитацију.....	7
3.2 Енергија и равнотежа левитације дијамагнетика	7
3.3 Стабилност левитације дијамагнетика	9
3.4 Стабилне зоне.....	11
3.5 Екперимент	14
3.6 Дискусија и могуће примене дијамагнетне левитације	15
4. Левитација Левитрона.....	17
4.1 Увод у левитацију левитрона.....	17
4.2 Стабилност и равнотежа левитрона.....	18
4.3 Магнетно поље на оси и стабилне зоне	21
4.4 Геометријски магнетизам.....	23
4.5 Геометријско проширење стабилности	25
4.6 Адијабатски услови.....	27
5. Закључак	28
6. Литература	29
Додатак.....	30

1. Увод

У току двадесетог века магнетна поља су се показала као веома корисно научно средство(алат) које је обезбедило мноштво нових знања (за брзо поткрепљење ове тврдње препоручљиво је погледати сајт Нобелове фондације са предавањима добитника Нобелове награде за физику 1985. и 1998. године за Квантни и Фракциони квантни Холов ефекат, јер би ова открића била немогућа без јаких магнетних поља). Андреј Гејм (Андрей Константинович Гејм) је крајем деведесетих година 20. века, радећи у 'High Field Magnet Laboratory - Nijmegen' у Холандији, био концентрисан на изучавање утицаја јаких магнетних поља на особине различитих материјала са циљем разумевања тих особина и откривања нових феномена. При томе је увек било присутно једно „али“, кад се радило са јаким магнетним пољима: велика већина изучаваних појава у јаким пољима захтевала је рад на температурама блиским апсолутној нули (-273 С). Уобичајено је да се верује - што је и најчешће било потврђено у току времена – да практично сви ефекти који потичу од јаког магнетног поља нестају кад се пређе на нормалне температуре околине. За истраживања на јако ниским температурама (температуре течног хелијума) је карактеристично коришћење криостата јер се само њиховом употребом хелијум може довољно дуго одржавати у течном стању. Нажалост, није само проблем довољно заморна процедура припремања нискотемпературних експеримената, још важније је то што температурска ограничења стварају баријеру између ових истраживања и њихових потенцијалних примена.

Радећи на веома ниским температурама у области мезоскопске и нанофизике са малим системима, чија величина најчешће није прелазила димензије једног микрона, Гејм је рутински користио услуге лабораторије за јака магнетна поља. Истиче да се много пута питао да ли постоје неки феномени карактеристични за јака поља и ниске температуре, који, упркос устаљеном мишљењу, опстају све до собних температура. На то питање, једини прави одговор је могао да да експеримент, а он је био на месту на коме су се рутински користила магнетна поља све до 30 Тесла. И 1996. године се одлучио да проба да експериментише са најраспрострањенијом супстанцом на Земљи, водом. Додатни стимуланс овој намери дао му је штампани научни рад групе јапанских физичара која је тврдила да је опазила тзв. „Мојсијев ефекат“: у посуди са водом су наводно видели раздвајање воде на два дела са сувом 'долином' између. Све ово се дешавало кад су посуду ставили у јако магнетно поље. Пошто у јапанском раду

није било покушаја да се овај ефекат објасни, Гејм и његове колеге су на почетку помислили да се ради о превари. Љубопитљивост их је ипак натерала да покушају да сами ипак провере резултате Јапанаца. Већ први покушај провере „Мојсијевог“ ефекта довео их је до изненађења. Сипајући мало воде у област јаког магнетног поља вертикалног магнета (јачина поља је била 20 Тесла) с изненађењем су открили да се вода није расула на под него је остала унутар области јаког магнетног поља лебдећи. После десетоминутних израчунавања закључили су да је разлог овог интересантног резултата (исто тако као и „Мојсијевог“ ефекта) слаби магнетизам воде познат као дијамагнетизам. Дијамагнетизам је универзална особина свих материјала, која настаје због промена у кретању електрона који круже око атомских језгара када се атоми ставе у магнетно поље.

Магнетна левитација (лебдење) представља начин за одржавање неких објеката у стабилној (било статичној или не) конфигурацији коришћењем само магнетних поља. Магнетна сила се користи да се супротстави ефектима других сила, пре свега сили гравитације, код класичне левитације, али и других сила која би допринеле да се објекат који левитирамо нађе изван равнотеже.

Семјуел Ерншоу (Samuel Earnshaw) британски математичар и физичар је 1842. године доказао да електростатичка (касније је ово проширено и на магнетостатичку) стабилна левитација није могућа у било каквој конфигурацији наелектрисања и статичких магнета. Ово се односило на сва нединамичка поља која долазе од магнетног, електричног или гравитационог поља. Ипак већ неколико година после открића дијамагнетизма од стране Фарадеја (Michael Faraday) 1846. године и неколико година после Ерншоуове теореме Лорд Келвин (Sir William Thomson) је показао да је левитација са дијамагнетним материјалима могућа. Исто тако, користећи се открићем суперпроводника почетком 20. века, Аркадиев је 1947. године је експериментално остварио левитирање суперпроводника, што се објашњавало пре свега тиме да суперпроводнике можемо да сматрамо идеалним дијамагнетицима.

У последње време је показано много примера магетне левитације од примена у индустрији и транспорту (Маглев воз) па све до радова Берија (Sir Michael Berry) и Гејма (Андрей Константинович Гејм) у којима је објашњена могућност левитирања разних објеката, од капљица воде па све до живе жабе. Ово све се наизглед супротставља Ерншоуовој теореме али ћемо даље показати како се ови примери искључују из области важења Ерншоуове теореме.

У овом раду бавићемо се пре свега дијамагнетном левитацијом неких објеката, која је једино могућа у јаким магнетним пољима, и левитацијом ротирајуће чигре-играчке комерцијално назване Левитрон.

2. Теоријски увод

2.1 Ерншуова теорема

Оригинална Ерншуова теорема (Earnshaw 1842 и Scott 1959) тврди да ниједан стационарни објекат састављен од наелектрисања, магнета и маса у фиксној конфигурацији не може да се одржи у стабилној равнотежи било каквом комбинацијом статичких електричних, магнетних и гравитационих сила, тј., било каквим силама које потичу од потенцијала који задовољавају Лапласову једначину (Pierre-Simon Laplace).

Доказ ове теореме данас изгледа веома једноставно: стабилна равнотежа таквог објекта би захтевала да његова енергија има минимум што је немогуће јер енергија мора да задовољава Лапласову једначину чија решења, као што је то добро познато, немају изолованих минимума (или максимума) већ само превојне тачке.

У време Семјуела Ерншоуа, када је он одштампао свој рад под називом: „On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether“, ствари су изгледале мало другачије. У овом раду су се разматрали одређени проблеми стабилности етра. Тада је то је био један од веома актуелних физичких проблема. Етар је био предложени концепт материје која испуњавала сав простор. Служио је као материјални супстрат кроз који се преносе електромагнетни таласи. У свом раду Ерншоу се питао како и помоћу којих сила се етар, који би требало да испуњава цео простор, одржава у равнотежном стању и једнако распоређује по целом простору.

Ерншоу је показао да не постоји могућност успостављања стабилне равнотеже између честица у етру ако оне интерагују комбинацијом сила облика $1/r^2$, тј., оних сила које опадају са квадратом растојања између честица (а такве су гравитационе, електростатичке и магнетостатичке силе). Без стабилног равнотежног положаја честица етра оне не би могле да служе као супстрат за провођење изотропних електромагнетних таласа. Наиме, тада не би било механизма који би честице, које су једном изведене из равнотежног стања спољним побуђењем електромагнетним таласима, враћао у равнотежни положај. Ерншоу је даље закључио да честице у етру морају да интерагују силом неког другог облика.

Ерншоуова теорема је последица математичких особина потенцијала облика $1/r$, тј., оних потенцијала који опадају реципрочно са повећањем растојања.

Лапласијан било ког збира потенцијала облика $1/r$ је нула: $\nabla^2 \sum \frac{k_i}{r} = 0$. То значи да је било где, где је сила једнака нули ($-\nabla \sum \frac{k_i}{r} = 0$), равнотежа нестабилна па зато и не може постојати локални минимум потенцијалне енергије. Уместо минимума, у три димензије, увек имамо само енергију у облику седла, тј., ако је равнотежа стабилна по једној оси нестабилна је по осталим.

Ова теорема је утицала на многа каснија открића, а и сам Ерншоу је брзо постао свестан важности свог резултата. И лорд Томпсон (Sir Joseph John Thomson) је представљајући свој модел атома у облику „шљива уроњених у пудинг“ (1904. године), имао на уму Ерншоуову теорему, јер позитивна и негативна наелектрисања не би никако могла да буду у равнотежи да нису, као у предложеном моделу, негативна наелектрисања уроњена у облак позитивних. Када је Рутерфорд (Ernest Rutherford) 1911. године открио данас прихваћену структуру атома, тј., да су атоми састављени од масивног позитивног језгра око кога круже негативна наелектрисани електрони, проблем структуре атома и атомских језгра није могао бити решен све до формулисања квантне механике.

Пошто је Ерншоуову теорема оригинално била дата за тачкаста наелектрисања, она се лако може проширити на систем статичких магнета. Разматрајући магнет диполног момента \mathbf{M} у пољу \mathbf{B} , за потенцијалну енергију оваквог магнета добијамо:

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -M_x B_x - M_y B_y - M_z B_z$$

Ако је \mathbf{M} има константну вредност, онда потенцијална енергија зависи само од компоненти \mathbf{B} . Пошто за магнетостатичка поља важи $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$, следи да је лапласијан сваке компоненте нула, па тако и да је $\nabla^2 U = 0$. Према томе енергија нема локални минимум.

Било каква статична левитација магнета се противи Ерншоуовој теореме, али као што ћемо показати у следећим поглављима она је могућа динамичких магнетних објеката и код дијамагнетних објеката под одређеним специфичним условима. Ерншоуову теорема није применљива у случају индукованог магнетизма карактеристичног за дијамагнетне материјале. За њих је под одређеним условима могуће постићи да укупна енергија (гравитациона + магнетна) има минимум.

3. Дијамагнетна левитација

3.1 Увод у дијамагнетну левитацију

Као што смо видели Ерншоува теорема забрањује левитирање магнета у статичној конфигурацији али видели смо много примера реалне левитације као што је левитација суперпроводника изнад сталних магнета која је постигнута још 1947, док је левитација са новим високо температурним суперпроводницима типа II постигнута осамдесетих година 20. века. Али у последње време једна нова врста левитације је изазвала пажњу међу физичарима, а то је левитација дијамагнетика. Већ неколико година после открића дијамагнета, Лорд Келвин је показао да је она могућа али је рекао да вероватно никада нећемо моћи да посматрамо овај феномен јер су за то потребне веома јаки магнети и веома лаке дијамагнетне супстанце. Поља која су била довољна за подизање дијамагнетних материјала постала су доступна средином 20. века. Већ 1939. В. Браунбек је левитирао мале комадиће графита у вертикалном електромагнету. Графит је дијамагнетни материјал са највећим односом магнетне сусцептибилности и густине тако да га је најлакше левитирати. Почетком деведесетих година 20. века експерименти са дијамагнетном левитацијом су постали чести, пре свега су занимљиви експерименти Амдреја Гејма који су укључивали левитирање живих бића као што су жабе и мишеви што је представљало велику сензацију за јавност.

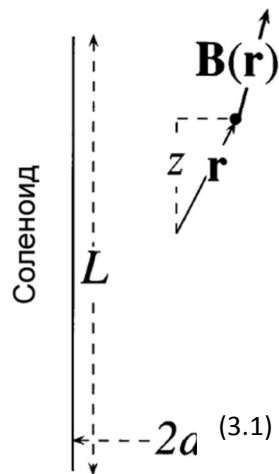
Да би показали како је уопште могућа стабилна дијамагнетна левитација, упркос Ерншоувој теореме извешћемо формуле за енергију и равнотежу дијамагнета у магнетном и гравитационом пољу, и онда ћемо извести услов за стабилност равнотеже. Даље ћемо за одређен тип соленоида наћи зоне стабилности и описати експерименте који су изводили Бери и Гејм.

3.2 Енергија и равнотежа левитације дијамагнетика

Проблем дијамагнетне левитације ћемо посматрати у вертикалном соленоиду чији је дијаграм представљен на слици 1. На тој слици је означен вектор магнетног поља $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} представља вектор положаја $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Нека је јачина магнетног поља у тој тачки $B(\mathbf{r}) = |\mathbf{B}(\mathbf{r})|$, и нека је убрзање гравитационог поља g . Нека дијамагнетни објекат који би био левитиран у ово пољу има масу m и запремину V . Претпоставићемо да је објекат хомоген и да има густину $\rho = m/V$. Такође нека је објекат израђен од материјала чија је магнетна сусцептибилност χ . За дијамагнетне материјале важи $\chi < 1$ (специјалан случај $\chi = -1$ важи за суперпроводнике тј. савршене дијамагнетике) тако да пишемо

За парамагнетике важи $\mu > \mu_0$, али ћемо у делу 3.3 показати да њихова левитација није могућа. Нас занимају материјали за које важи $\mu < \mu_0$ јер је уствари већина материјала која нас окружује слабо дијамагнетна. До на одређену тачност индуковани магнетни моменат \mathbf{m} је једнак:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{r} \times \nabla \phi \, dV \quad (3.1)$$



Где је μ_0 магнетна пермаебилност вакуума. Слика 1: Геометрија проблема

(У прецизнијем извођењу (Landau et al 1984), укључујући и дисторзију поља од стране површине објекта, у претходној једначини се укључује и члан кој зависи од облика али то не утиче на зависност вектора магнетног момента и вектора магнетне индукције).

Инфинитезимални рад који се изврши над објектом магнетног момента у пољу индукције је $\delta W = \mathbf{m} \cdot \nabla \phi$. Убацавањем претходне једначине за магнетни момент и интеграцијом по пољу од нула до ∞ добијамо магнетну енергију објекта у магнетном пољу. Коначно додајући и гравитациону потенцијалну енергију добијамо формулу за енергију:

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{r} \cdot \nabla \phi \, dV - m g z \quad (3.2)$$

Да би објекат био у равнотежи, укупна сила која делује на телу мора да буде нула. Тиме важи:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

где је \hat{z} јединични вектор у вертикалном правцу. Сва поља која посматрамо имају ротациону симетрију око \hat{z} (сматрамо да је геометрија соленоида таква, тако да нам левитација објекта зависи само од његовог вертикалног положаја).

Посматрајући услов за равнотежу из претходне једначине и стављајући да је јачина поља по \hat{z} оси B_z , добијамо:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = m g - \mathbf{m} \cdot \nabla B_z = 0 \quad (3.3)$$

Видимо да услов за равнотежу зависи само од густине објекта, а не од његове масе. Као што видимо из једначине (3.2) енергија дијамагнетног објекта у магнетном пољу зависи од укупног интензитета поља што ће се показати као круцијални услов за стабилну равнотежу.

3.3 Стабилност левитације дијамагнетика

За левитацију, равнотежни положај мора да буде стабилан, тј. енергија мора да поседује минимум, то јест, сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ мора да враћа тело у стабилан положај. Започећемо тиме да услов за стабилну равнотежу искључује парамагнетне материјале. Потребан услов за стабилност је:

$$\oiint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} < 0 \quad (3.4)$$

где се интеграција врши око било које затворене површине која окружује тачку равнотеже. Уствари овај услов значи да флукс векторског поља силе око мале затворене површине је негативан то јест сила делује ка равнотежном положају. Овај услов такође можемо записати као $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) < 0$, и тиме једначина (3.2) написана за парамагнете тако да је $|\chi|$ замењено са $-\chi$, добијамо:

$$\nabla^2 B^2(\mathbf{r}) < 0$$

Али такође важи:

$$\begin{aligned} \nabla^2 B^2(\mathbf{r}) &= \nabla^2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2 + B_x \nabla^2 B_x + B_y \nabla^2 B_y + \\ &B_z \nabla^2 B_z] = 2[|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

где последња једнакост важи јер компоненте магнетне индукције \mathbf{B} задовољавају Лапласову једначину (нема магнетних монпола тако да мора да важи $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и нема струја унутар соленоида тако да је $\nabla \times \mathbf{B} = 0$). Из тога следи да је потребан услов за стабилност нарушен, из чега следи да је стабилна равнотежа парамагнета немогућа.

Једначина (8) је уствари кључна у доказу да интензитет јачине магнетне индукције $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ магнетног поља у слободном простору може да има минимум али не и максимум. Ово може да се примени на сва поља за које је дивергенција нула и која су ротационо симетрична.

Довољан услов за стабилност (док је (3.4) само потребан услов) је да енергија мора да расте у свим смеровима који полазе из равнотежног положаја који задовољава (3), то јест: $\partial_x^2 E(r) > 0$, $\partial_y^2 E(r) > 0$ и $\partial_z^2 E(r) > 0$ и тиме из (3.2) следи:

$\partial_z^2 B^2(\mathbf{r}) > 0$ (вертикална стабилност),

$\partial_x^2 B^2(\mathbf{r}) > 0$ и $\partial_y^2 B^2(\mathbf{r}) > 0$ (хоризонтална стабилност).

Због ротационе симетрије услови за хоризонталну стабилност левитације су исти по једној и другој оси. Показаћемо да се услови за стабилност могу приказати помоћу магнетног поља на оси $B(z)$ и његовог првог и другог извода $B'(z)$ и $B''(z)$.

То ћемо почети увођењем магнетног скаларног потенцијала $\Phi(r)$ које задовољава:

$$\mathbf{B}(r) = -\nabla\Phi(r) \quad (3.6)$$

Узећемо да важи Лапласова једначина за потенцијал тј. $\nabla^2\Phi(r) = 0$ и да важи да је потенцијал стационаран на оси, то јест да важи за $x = y = 0$ да је први извод потенцијала нула. Нама је важно да напишемо облик потенцијала у близини осе тако да ћемо потенцијал $\Phi(r)$ развити у ред до другог степена:

$$\Phi(r) = \Phi(0,0,z) + \frac{1}{2}(x^2\partial_x^2\Phi(0,0,z) + y^2\partial_y^2\Phi(0,0,z))$$

Корисно је написати изводе потенцијала као $\phi_n(z) = \partial_z^n\Phi(0,0,z)$. Пошто смо рекли да важи Лапласова једначина за потенцијал и због тога што је поље ротационо симетрично важи: $\partial_x^2\Phi(0,0,z) = \partial_y^2\Phi(0,0,z) = -\frac{1}{2}\phi_2(z)$

Према томе потенцијал $\Phi(r)$ можемо написати као:

$$\Phi(r) = \phi_0(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\phi_2(z)$$

Из (3.6), квадрат јачине поља до развоја другог степена:

$$B^2(r) = \phi_0^2(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\phi_2^2(z) - 2\phi_1(z)\phi_3(z)) \quad (3.7)$$

И тиме услови за стабилност могу да се напишу помоћу $\phi_n(z)$, а и тиме помоћу поља и извода поља на оси и тиме добија дискриминанте стабилности:

$$D_1(z) \equiv B'(z)^2 + B(z)B''(z) > 0 \text{ услов за вертикалну стабилност и} \quad (3.8)$$

$$D_2(z) \equiv B'(z)^2 - 2B(z)B''(z) > 0 \text{ услов за хоризонталну стабилност.}$$

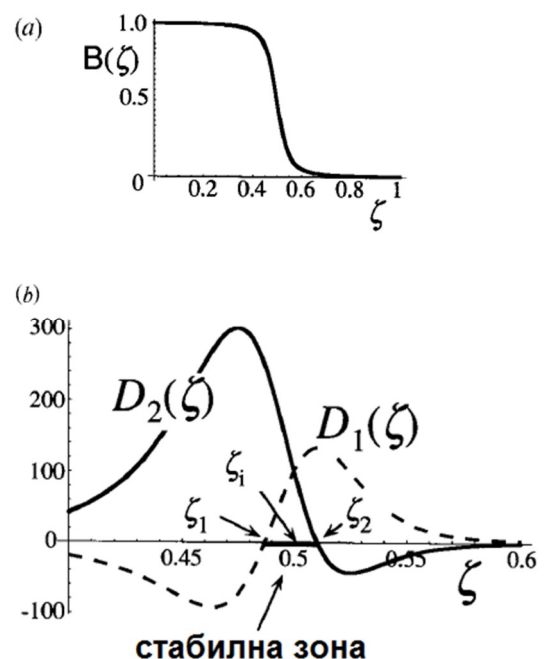
Добијањем услова за стабилност равнотеже левитације дијамагнетика у пољу морамо се запитати на који начин и како левитација дијамагнетика нарушава Ерншоуовј теорему.

Математички разлог за то што дијамагнетици левитирају упркос Ерншоувој теореме је то да енергија зависи од јачине поља B , које за разлику од својих компоненти не задовољава Лапласову једначину и може поседовати минимум. Физички, дијамагнетик нарушава услове теореме јер диполни моменат зависи од јачине поља B у коме се налази према (3.1). Микроскопски то је тако јер је дијамагнетизам квантни феномен који зависи од орбиталног кретања електрона у материјалу и не може се апроксимирати било каквом конфигурацијом статичних магнета. Наивно можемо рећи да само кретање електрона у материјалу нарушава услове теореме која захтева статичну конфигурацију магнета.

Такође левитирање и стабилност сталних магнета левитираних изнад суперпроводника типа I је слична левитацији дијамагнетика јер је суперпроводник, као што смо већ рекли савршен дијамагнет. Он као такав ствара поље које је потпуно супротно од поља сталног магнета и тако ако се магнет помери према суперпроводнику из равнотежног положаја, помери се и „слика“ тог магнета у суперпроводнику тако да енергија расте и тиме се то кретање поништава.

3.4 Стабилне зоне

Извођењем услова за стабилност левитације дијамагнета ми смо добили који услови морају да важе за магнетно поље. Ми ћемо посматрати левитацију која се врши изнад соленоида. Разлози за то су то што је првобитно левитација дијамагнета извршена изнад соленоида јер је поље соленоида погодно за левитацију. Такође као што ћемо видети у следећем поглављу поље које играчку Левитрон одржава у ваздуху је слично оном које даје соленоид. Поље и у соленоиду и испод играчке левитрон опада монотонно од вредности координате до $z=0$. Такође постоји превојна тачка на некој вредности координате z , тј. важи $\frac{dB}{dz} = 0$. У превојној тачки вредности дискриминанти које дефинишу стабилност су очигледно позитивне јер зависе само од квадрата



Слика 2. (а) Поље соленоида (б) дискриминанте стабилности

првог извода поља у тој тачки, тако да важи да је левитација стабилна у превојној тачки.

Пошто функција јачине поља прелази из конкавне у конвексну функцију у тачки z_i , једноставно можемо да видимо да $D_1(z)$ има нулу на неком $z_1 < z_i$ (у тој тачки важи $B'(z)^2 = -B(z)B''(z)$) тако да вертикална стабилност захтева $z > z_1$, док $D_2(z)$ има нулу на неком $z_2 > z_i$ (у тој тачки важи $B'(z) = 2B(z)B''(z)$) тако да хоризонтална стабилност захтева $z > z_2$. Установили смо постојање стабилне зоне на оси за коју важи $z_1 < z < z_2$. На овим висинама дијамагнетни објекти могу бити левитирани стабилно.

Да би левитација уопште била остварена потребно је да услов за равнотежу (3.3) буде остварен и да лежи у стабилној зони. Ово се може постићи променом струје у соленоиду која само скалира јачину магнетног поља али и одржава геометрију функције поља тако да стабилна зона остаје иста.

Као модел који проучавамо, посматраћемо соленоид дужине L и полупречника a (приказано на слици 1). Дефинисаћемо скалиране променљиве:

где $\xi \equiv x/a$ и $\eta \equiv y/a$ одговарају x и y координатама

док $\zeta \equiv z/L$ одговара z координати и $\delta \equiv 2a/L$ представља својство соленоида.

Ако са B_0 означимо јачину поља у центру соленоида где је $z = 0$, онда користећи скалиране променљиве дефинишемо поље:

$$\frac{B(\zeta, \delta)}{B_0} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \delta^2} \cdot \left(\frac{1 - 2\zeta}{\sqrt{(1 - 2\zeta)^2 + \delta^2}} + \frac{1 + 2\zeta}{\sqrt{(1 + 2\zeta)^2 + \delta^2}} \right) \quad (3.9)$$

Превојне тачке се налазе близу крајева соленоида ($\zeta = \pm 1/2$) али се по услову равнотеже (4) левитација одржава на $\zeta = +1/2$ где је извод функције поља негативан. На слици 2 је представљено поље за произвољну вредност $\delta = 0.1$ и представљене су дискриминанте D_1 и D_2 . Стабилна зона у овом случају је $\zeta_1 = -.487083 < \zeta < \zeta_2 = 0.510223$. Као што видимо зона стабилности је веома мала.

За танке соленоиде ($\delta \ll 1$) могу се применити поједностављења у виду апроксимација. Први члан у формули (3.9) се може апроксимирати као 0 где $\zeta \approx 1/2$, док се други члан може апроксимирати као 1. Израчунавањем добијамо да је превојна тачка и тачке границе стабилне зоне изражене преко карактеристика соленоида:

$$z_i = \frac{1}{2}L$$

$$z_1 = \frac{1}{2}L - 0.258199a < z < z_2 = \frac{1}{2}L + 0.204124a$$

За дебееле соленоиде ($\delta \gg 1$), поједностављење је опет могуће јер се цео соленоид може апроксимирати као струјни прстен кроз кога протиче стурја тако да је поље:

$$B(z) = \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Из (16), тачка превоја и стабилна зона је:

$$z_i = \frac{1}{2}a$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}a = 0.378a < z < z_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}a = 0.6325$$

Корисно је представити контурни график енергије (3.2) у зависности од поља у центру соленоида, јер тиме можемо да видимо како се минимум појављује и нестаје како равнотежни положај улази и излази из стабилне зоне. Дефинишимо бездимензионо поље β и енергију E :

$$B_0 \equiv \beta^2 \frac{\rho g L \mu_0}{|\chi|}$$

$$E(r) \equiv \frac{|\chi| V B_0^2}{2\mu_0} E(\xi, \eta, \zeta; \beta, \delta)$$

Из (3.7) које представља апроксимацију поља близу осе и преко (3.8) које представља профил јачине поља на оси добијамо:

$$E(\xi, \eta, \zeta; \beta, \delta) = \frac{2}{\beta^2} \zeta + \frac{1}{4} \left[B(\zeta, \delta)^2 + \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2) * \{ B'(\zeta, \delta)^2 - 2B(\zeta, \delta)B''(\zeta, \delta) \} \right]$$

Из услова за равнотежу (3.3), поље $\beta(z)$ за који дијамагнет плута на висини ζ је:

$$\beta(z)^2 = -[B(\zeta, \delta)B'(\zeta, \delta)]^{-1}$$

Слика 3 показује контурни приказ енергије E (еквиенергетске линије) како се поље β смањује кроз стабилан опсег, за соленоид за кога је $\delta = 0.1$. На врху стабилног опсега (слика 3(б)) $\beta = \beta_2 = 0.513563$, што одговара равнотежи на гоњој граници $z = z_2$ стабилне зоне, док је на дну опсега (слика 3(д)) $\beta = \beta_1 = 0.417998$, што одговара равнотежи на најнижој тачки $z = z_1$ стабилне зоне. На вредности поља β_2 појављује се минимум (са још два „седла“ ван поља) дељењем „седла“ на оси док се при вредности поља β_1 минимум нестаје јер се поништава са још једним „седлом“ на оси. Прикази поља близу зида соленоида (близу $\xi = 0.05$ на слици 3) не би требало да се узимају за много тачне јер је приказ енергије заснован на апроксимацији другог реда (3.7), која је стриктно тачна веома близу осе.

Дијамагнети који се стабилно левитирају могу правити мале, приближно хармонијеске осцилације око енергетског минимума, и у експерименту те осцилације се приказују као споро љуљање објекта. Веће осцилације би биле анхармоничне. Регион у коме могу да се дешавају ове осцилације узимају облик „коничног“ џепа (слика 3(ц)). Веома је тешко израчунати кретање у тој области али могуће је израчунати колко је та зона велика. Са слике три дефинишимо ту раздаљину као _____ од осе до „седла“ која су ван осе за поље које одговара равнотежи за

Из (23) се добија да та „седла“ леже на _____, и уз коришћење (4) добијамо:

За танке соленоиде добијамо _____
 Када је _____ добијамо – _____ што се слаже са сликом 3(ц).

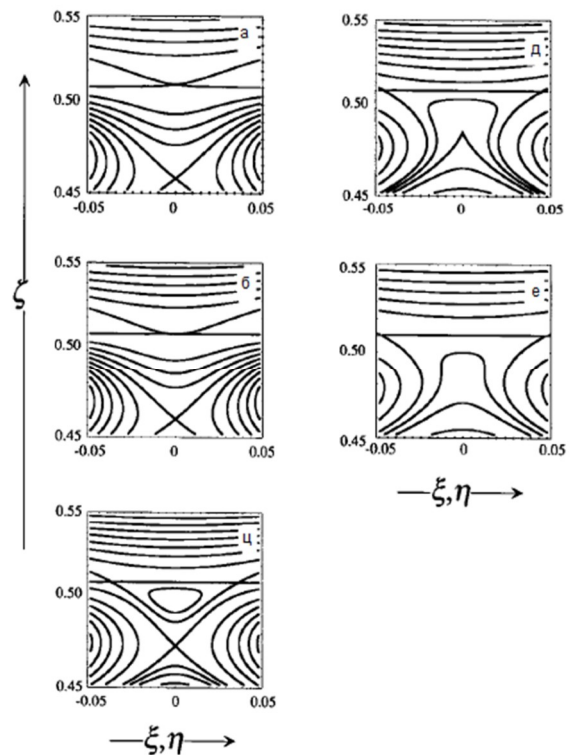
3.5 Екперимент

У овом делу ћемо описати експеримент који су урадили Бери и Гејм. Пошто већина материјала има магнетну суцептибилност реда _____. За воду, _____ и користећи _____ из услова за равнотежу (4) добијамо да је одговарајући производ поља и градијента (извода) поља потребан за левитацију воде:

$$(27)$$

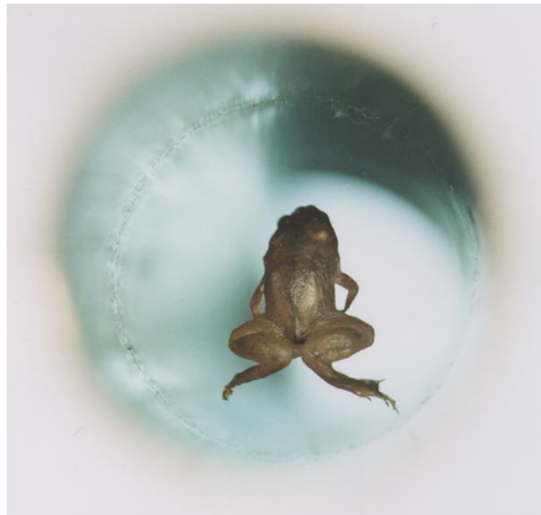
Ово је постигнуто у експериментима коришћењем „Bitter“ магнета који уствари представља соленоид направљен од густо напакваних металних плоча кроз које цик-цак протиче струја. Овај магнет је континуално трошио око снаге, али је то уствари снага која се која се у виду топлоте ослобађа у соленоиду - суперпроводна левитација је могућа без додавања енергије осим оне за хлађење самог суперпроводника.

Мерења поља које производи соленоид који је коришћен у експерименту показалу су да постоји превојна тачка на _____ где је поље једнако _____ (_____ је јачина поља у центру соленоида) и градијент поља у тој тачки је _____, где се потребно централно поље добија из (27):



Слика 3: Приказ контура скалиране енергије (гравитациона + магнетна) за дијамагнет, за различите вредности бездимензионог поља _____ у центру соленоида за кога важи _____

Из (3.8) и израчунатих података у експерименту дискриминанте и су израчунате и тиме стабилна зона је нађена у опсегу . У експерименту су левитирани разни дијамагнетни објекти тако што је струја у соленоидима подешена да би се видела стабилна левитација. На слици 4 је приказана жаба која је левитирана у том експерименту. Потребно поље је израчунато да је у сваком случају око што се слаже са теоријски процењеном вредношћу. Пажљивим мерењем стабилне левитације мале пластичне куглице (3мм полупречник) добијено је да она може да се држи у стабилној равнотежи у опсегу што се слаже



Слика 4: Жаба левитирана у експерименту Берија и Гејма

са теоријским предвиђањем.

Индуковани магнетни момент из једначине (1) одговоран за левитацију дијамагнета може да се посматра као еквивалент струји која кружи кроз површину која обухвата индуковани момент. За објекат кој има полупречник (као што је жаба приказана на слици 4) ова еквивалентна струја је око . Наравно жаба је преживела овај експеримент и била је веома добро кад је изашла јер ова струја представља суму свих микро струја ие се локализују на нивоу атома, а не представља укупно наелектрисање које пролази кроз жабу у јединици времена.

3.6 Дискусија и могуће примене дијамагнетне левитације

Наша теоријска анализа дијамагнетне левитације је занемарила барем три мала ефекта који могу имати занимљиве последице. Први се појављује због тога што постоји зависност индукованог магнетног момента од облика тела које се левитира. За жива бића (као што су жабе) које су заробљене у енергетском минимуму то може да се искористи да би се остварио механизам за бег из стабилне левитације. Ако је жаба на почетку у равнотежи, на њу не делују силе. Мењајући облик индуковани момент ће се променити и сила која делује на жабу неће више бити нула тако да жаба креће да осцилује око мало другачије тачке. Понављајући овај маневар фреквенцијом осциловања на минимуму, осцилације би биле појачане резонанцијом све док жаба не би напустила стабилну зону. Ово је веома мали ефекат јер зависност индукованог магнетног момента од облика је

реда тако да би таквих пливајућих покрета било потребно око . У експерименту је примећено да жаба покушава да плива али то није утицало на њен остатак у равнотежној левитацији јер током целог експеримента од око 30 мин она је остала у равнотежи.

Други ефекат који се појављује је то да сваки објекат који се левитира има неке коначне димензије. Равнотежа зависи од укупне магнетне силе која мора да балансира тежину тела. Локална равнотежа сила која делује на тело ће се остварити само у тачки равнотеже док за мање висине укупна сила делује на горе, а за веће висине укупна сила делује на доле. То уствари значи да ће било које тело бити сабијено у зависности колико члан се мења око равнотежног положаја. Било које живо биће које би било левитирано у практичном смислу не би осетило овај ефекат јер су сва жива бића већ навикла на деловање гравитације која у неку руку сабија сва жива бића.

Трећи ефекат који је занемарен је тај да у било ком нехомогеном телу постоје и дијамагнетне нехомогености, тако да за разне делове објекта које се левитира, равнотежни положај је различит за различите тачке. Ово би могло да изазове чудне ефекте код живих бића рецимо ако је апсолутна магнетна суцептибилност меса мишића од оне код костију, у том случају би живо биће било стабилно захваљујући својим мишићима док би кости у унутрашњости „висиле“. У пракси и овај ефекат је тешко приметљив бар код живих бића јер су оне већином састављена од воде, а и у експерименту Берија и Гејма сва жива бића која су коришћена су прошла без икаквих видних последица.

Примене ове врсте левитације су још доста не испитане јер је тек скоро (у последњих 20 година) схваћено да је она изводљива у више десетина ако већ не и стотина лабораторија широм света.

Постоји неколико особина која су јединствена за дијамагнетну левитацију за разлику рецимо од суперпроводничке левитације која је већ широко распрострањена. Као прво дијамагнетна левитација омогућује fino намештање левитације било ког материјала подешавајући само јачину поља у соленоиду. То као пример може да се искористи за прављење веома осетљивих гравитметра који могу веома прецизно да прате локалне промене у гравитационом пољу.

Најважнија и најзанимљивија предност овакве левитације је то да је магнетна сила која успоставља равнотежу над телом равномерно распоређена по целој запремини тела. У ствари за хомогени

материјал гравитација је поништена на нивоу индивидуалних атома. Наравно ово није савршено бестежинско стање јер услед већ поменути три ефекта постоје локалне девијације од равнотеже али у већини примена ови ефекти се могу



Слика 5: Левитирана капљица воде

занемарити јер је лакоћа добијања таквог бестежинског стања много већа од одлажења у свемир. Оваква дијамагнетна левитација представља најближе одређење антигравитационој машини из жанра научне фантастике. Посматрајући левитирану капљицу воде као на слици 5 видимо да је могуће проучавати бестежинску динамику флуида и без одлаженња у свемир.

Као што смо рекли и комплексни биолошки системи могу на овај начин лако да се левитирају тако да могу да се јаве занимљиви ефекти као што је у једном експерименту искоришћено веома јако магнетно поље које је биљци заменило гравитационо поље и тиме стрну на коју ће биљка расти.

Што се тиче утицаја јаких магнетних поља на здравље они још нису довољно изучени али у неким експериментима су људи проводили 40 сати унутар поља јачине 4Т и нису осећали никакве последице тако да они и да постоје не би требало да су велики.

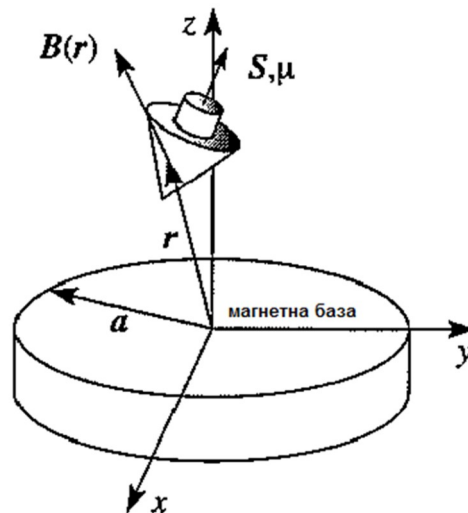
4. Левитација Левитрона

4.1 Увод у левитацију левитрона

Генијална механичка играчка развијена од стрне В. Хонеса, назива се Левитрон (Levitron™). Ова играчка се састоји од сталног магнета у облику чигре, кој се може подићи и пустити да се одржава у ваздуху при томе ротирајући у равнотежи изнад тешке основе иа се састоји од стално магнетизоване керамичке плоче (слика 6). Маса чигре може фино да се подешава са више тегова разних маса.

У овом делу ћемо описати која теорија стоји иза стабилне левитације овакве направе, тј. адијабатску теорију и њено побољшање које се назива геометријски магнетизам. Циљ није у попуно тачном квантитативном описивању овог уређаја већ у откривању механичких принципа који стоје иза овог уређаја.

Чигра је ротационо симетрично круто тело масе M , са моментом импулса S , чији се центар масе налази на z -оси. Чигра се може посматрати као магнетни дипол са векторским моментом S, μ (фиксни интензитет μ) који је постављен у тачки $(0,0,z_0)$ и усмерен дуж осе симетрије (слика 6). Магнетна база даје магнетно поље јачине $B(r)$. Градијент овог поља компензује гравитациону силу тако што делује одбојном силом на z и уз присуство момента импулса S делује жирооскопски што спречава чигру да се преврне. Такође мора постојати и механизам који би ову левитацију учинио стабилном.



Слика 6: Левитрон, поставка проблема

Из Ерншоуове теореме показује се да мора постојати неки суптилан начин за одржавање равнотеже ове играчке јер на чигру делују само гравитациона и магнетна сила. Наравно чигра се окреће што представља побијање услова Ерншоу теореме али ми морамо показати како и зашто ротација чигре утиче на њену стабилност у магнетном пољу.

Могућност стабилног плутања чигре у статичном временски-непроменљивом (пољу магнетне базе) је могуће јер потенцијал чигре је динамичне природе (део 4.2). Потенцијал чигре је збир гравитационе потенцијалне енергије и магнетне енергије магнетног дипола усредњене по прецесији око z , и ова усредњена енергија (адијабатско усредњење) укључује интензитет поља $B(r)$, а не вертикалну компоненту поља B_z . Стабилност захтева да потенцијална енергија поседује минимум што је могуће због малих разлика између $B(r)$ и B_z (тј. одступање од вертикалне осе) али је ово могуће само у уском опсегу масе чигре (одељак 4.3). Такође оспег зависи од облика поља $B(r)$ које може драстично да се промени са температуром.

Адијабатско усредњење које се користи да се усредњи магнетна енергија услед брзог окретања чигре није егзактна и зато се користи прва корекција додатном силом која зависи од брзине чигре $\dot{\phi}$ којом се чигра креће кроз магнетно поље. Ова сила се назива геомтријски магнетизам тј. има облик $\mu \dot{\phi} \frac{dB(r)}{dr}$, где је μ ефективно поље (одељак 4.4) конструисано преко извода компонената $B(r)$. У одељку 4.6 показаћемо које угаоне брзине чигре задовољавају услов стабилности и у ком опсегу је коришћена апроксимација за извођење услова добра апроксимација.

4.2 Стабилност и равнотежа левитрона

Потенцијална енергија чигре је збир гравитационе и магнетне енергије:

$$E = mgz - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

Момент импулса се мења услед деловања момента магнетне силе на дипол дефинисан као $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, и тиме је промена момента импулса по времену:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \quad (4.2)$$

Сада можемо да апроксимирамо да је чигра брза тј. да се њен момент импулса може сматрати паралелан са угаоном брзином чигре и са њеном осом симетрије. Услов за ово је да је брзина окретања чигре (спин) много бржа од прецесије. Касније ћемо показати да овај услов важи. За тренутно извођење важно је да можемо да претпоставимо да је \mathbf{S} паралелно са $\boldsymbol{\mu}$. Ово нам омогућава да једначину промене момента импулса (4.2) напишемо у зависности од интензитета магнетног поља B и вектора правца магнетног поља \mathbf{b} које се „види“ са покретне чигре:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) = B(t)\mathbf{b}(t) \quad (4.3)$$

Тиме промена момента импулса може да се напише као:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \Omega(t)\mathbf{b}(t) \times \mathbf{S}(t) \quad (4.4)$$

Где је $\Omega = -\mu_B/S$.

Једначина (4.4) описује прецесију осе симетрије чигре око правца поља $\mathbf{b}(t)$, где је интензитет момена импулса S одржан. Ако је прецесија брза, тј. ако је $|\Omega| \gg |\dot{\mathbf{b}}|$, онда је \mathbf{S} везан са \mathbf{b} у смислу да компонента $\mathbf{S} \cdot \mathbf{b}$ – **адијабатска константа** – је приближно одржана.

Следи да је и компонента $\mu_B \equiv \boldsymbol{\mu}(t) \cdot \mathbf{b}(t)$ (компонента магнетног момента у правцу поља) исто тако адијабатска константа, тако да енергија (4.1) постаје:

$$E = E(r) = mgz - \mu_B B(r) \quad (4.5)$$

Ова апроксимација ће бити додатно објашњена у одељку 4.4, где ће бити показано да повезаност \mathbf{S} у односу на \mathbf{b} не може бити егзактна ако \mathbf{b} није константно што ће се искористити за извиђење поправке првог реда тј. поправке која зависи од $\dot{\mathbf{b}}$. Важно је приметити да адијабатска претпоставка да је прецесија брза различита од претпоставке да је брзина окретања чигре брза. Иако се наизглед чини да се ове две претпоставке сукобљавају даље ће бити показано да то овде није случај.

Са свим овим претпоставкама слично као у одељку 3 ћемо извести услове које поље мора да задовољи да би левитација била равнотежна и стабилна.

Да би чигра била у стабилној равнотежи следећи услови морају да важе за енергију $E(r)$:

$$\begin{aligned} \nabla E(r) = 0 & \text{ услов за равнотежу} & (a) \\ \partial_z^2 E(r) > 0 & \text{ услов за вертикалну стабилност} & (b) \\ \partial_x^2 E(r) > 0 \text{ и } \partial_y^2 E(r) > 0 & \text{ услови за хоризонталну стабилност} & (c) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Као у одељку 3.3 увешћемо скаларни потенцијал $\Phi(r)$ тако да важи

$$\mathbf{B}(r) = -\nabla\Phi(r) \quad (4.7)$$

И исто тако развићемо потенцијал $\Phi(r)$ до другог реда у односу на потенцијал на оси $\Phi(0,0,z)$.

$$\Phi(r) = \Phi(0,0,z) + \frac{1}{2}(x^2\partial_x^2\Phi(0,0,z) + y^2\partial_y^2\Phi(0,0,z))$$

Сменом $\phi_n(z) = \partial_z^n\Phi(0,0,z)$ и искоришћавањем лапласове једначине добијамо:

$$\Phi(r) = \phi_0(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\phi_2(z) \quad (4.8)$$

Ако вектор \mathbf{R} дефинишемо као $\mathbf{R} \equiv (x, y)$ и $R \equiv |\mathbf{R}|$ онда једначина (4.8) постаје:

$$\Phi(r) = \phi_0(z) - \frac{1}{4}R^2\phi_2(z) \quad (4.9)$$

Енергија (5) укључује интензитет поља B , које се из (9) добија:

$$B(r) = \phi_1 \operatorname{sgn}\phi_1 \left[1 + \frac{R^2}{8} \left(\frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} - 2 \frac{\phi_3}{\phi_1} \right) \right] \quad (4.10)$$

На оси хоризонтални еквилибријум у (4.6а) је гарантован симетријом. Вертикална равнотежа захтева да је гравитациона сила поништена магнетном силом на оси усмереном на горе која зависи од градијента интензитета поља, тако да услов за вертикалну равнотежу постаје:

$$mg = \mu_B \partial_z B = \mu_B \phi_2 \operatorname{sgn}\phi_1 \quad (4.11)$$

Из овога видимо да ако је лева страна једнакости позитивна у зависности од поља ми само треба да подесимо масу да би добили вертикалну равнотежу. Уз услове за вертикалну и хоризонталну стабилност (4.6б,4.6ц), све ово даје услове:

$$\mu_B \phi_2 \operatorname{sgn}\phi_1 > 0 \text{ за равнотежу}$$

$$\mu_B \phi_3 \operatorname{sgn}\phi_1 < 0 \text{ за вертикалну стабилност}$$

$$\mu_B \operatorname{sgn}\phi_1 \left(2\phi_3 - \frac{\phi_2^2}{\phi_1} \right) > 0 \text{ за хоризонталну стабилност}$$

Видимо да је немогуће испунити ове услове за $\mu_B > 0$, јер би онда услов за вертикалну стабилност захтевао да су ϕ_3 и ϕ_1 супротног знака али онда услов за хоризонталну стабилност никад не би могао да буде испуњен јер би лева страна увек била негативна. Из овога следи $\mu_B < 0$, то јест, пројекција магнетног момента на спољно поље \mathbf{B} је антипаралелно са \mathbf{B} тако да услови постају:

ϕ_1 и ϕ_2 имају супротне знаке (равнотежа)

$$\begin{aligned}
\phi_1 \text{ и } \phi_3 \text{ имају исте знаке (вертикална стабилност)} & \quad (\text{а}) \\
\phi_2^2 - 2\phi_3\phi_1 > 0 \text{ (хоризонтална стабилност)} & \quad (\text{б}) \quad (4.12) \\
& \quad (\text{ц})
\end{aligned}$$

Видимо да без члана ϕ_2^2 у услову 12ц не би било могуће испунити и услове (4.12б) и (4.12ц), и уз чињеницу да овај члан директно произилази из разлика између B и V потврђује то да адијабатска енергија (4.5) омогућава стабилну левитацију чигре упркос Ерншоу теореме.

4.3 Магнетно поље на оси и стабилне зоне

Магнетна база левитрона може да се постматра као планарна дистрибуција вертикално оријентисаних дипола, који представљају извор магнетног поља, густине $\rho(\mathbf{R})$ (где \mathbf{R} представља растојање од центра магнетне површине). Формула за потенцијал (Џексон 1975):

$$\phi_0(z) = z \iint \frac{\rho(\mathbf{R})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d^2\mathbf{R} \quad (4.13)$$

Без губитка општости ρ се узима да је позитивно тј. да диполи у основи показују на горе.

Код играчке Левитрон основа је плоча у облику квадрата, која је равномерно намагнетисана ($\rho = const.$) осим централне ненамагнетисане рупе која служи томе да омогући чигру да се заврти пре него што крене да левитира. Ипак анализа стабилности је иста ако узмемо кружни диск (полупречника a и $\rho = const.$). Једначина (4.13) за равномерно намагнетисан диск даје:

$$\phi_0(z) = 2\pi\rho \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (4.14)$$

Изводи ϕ_1 и ϕ_2 су редом негативни и позитивни тако да је услов 11а увек испуњен. То значи да равнотежа може да се успостави на било којој висини све док се маса постави према једначини (4.11). ϕ_3 је негативно за $z > \frac{1}{2}a$ тако да према (4.12б) левитација је вертикално стабилна за $z > \frac{1}{2}a$. Функција у (12ц) је пропорционална са $2a^2 - 5z^2$ тако да хоризонтална стабилност захтева $z < \sqrt{\frac{2}{5}}a$. Према томе зона стабилне равнотеже тј. левитације је:

$$\frac{1}{2} < \frac{z}{a} < \sqrt{\frac{2}{5}} \quad (4.15)$$

Сада ћемо слично као у одељку 3.4 представити анализу енергетских минимума помоћу контурног приказа енергије за разне висине левитације.

Слично као у 3.4 дефинишимо бездимензионе променљиве: $\xi \equiv x/a$ и $\eta \equiv y/a$ одговарају x и y координатама док $\zeta \equiv z/L$ одговара z координати. Дефинисаћемо бездимензиону енергију:

и бездимензиону масу:

Из (5),(10) и (14) налазимо да је енергија тела близу осе:

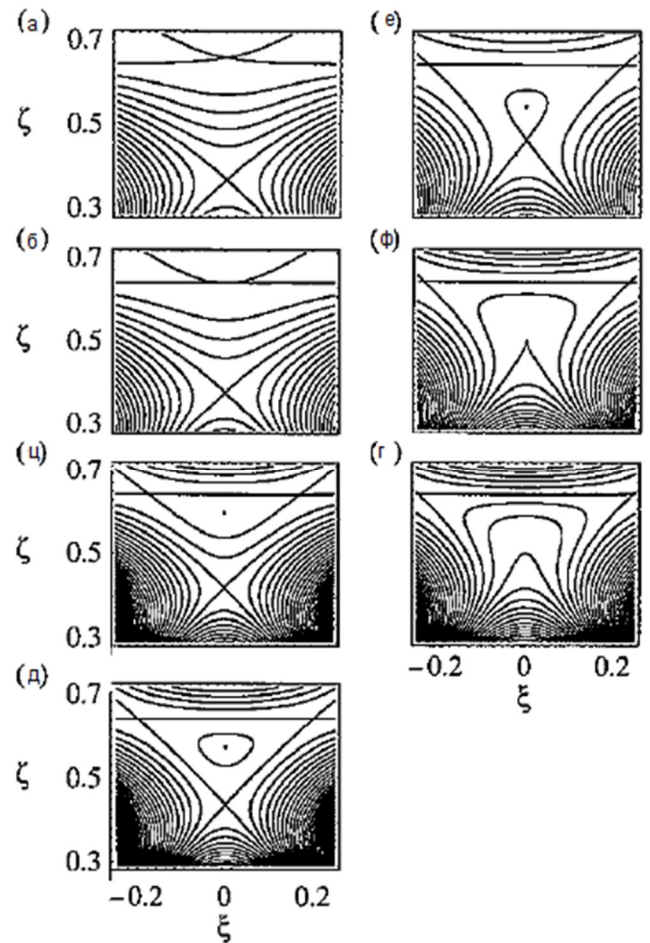
$$(4.16)$$

Опсег маса које задовољавају (15) је одређено условом равнотеже (11), што даје:

Према (4.15) из претходне једначине следи да је за $m < m_c$, маса једнака m_c

док је за $m > m_c$, маса једнака m_c

што значи да је опсег скалираних маса $m < m_c$. Слика 7 показује контуре енергије (4.5) као функцију вертикалне позиције чигре, за низ маса које укључују и стабилан интервал. Између слика 7б и 7ф, које одговарају $m < m_c$ и $m > m_c$, енергија има минимум. Мењајући масе од m_c до m_c видимо да се на почетку стабилног опсега креира енергетски минимум од „седла“ које се налази на осци. Тај минимум нестаје када маса прелази поништавајући се са другим осцим „седлом“. Анализа је слична као и у одељку 3.4 тако да и овде се у зони стабилности дешава да се облик енергетског минимума мења што је приказано на слици 7д. Показује се да је ту маса:



За свако M у стабилној зони, област стабилног кретања чигре може да се дефинише као површина која одговара највећој затвореној контури која окружује енергетски минимум. Показује се да је ова област највећа за $M = M_{SC}$.

Слика 7: Контурни приказ пресека у зависности од координата ζ, ξ енергије (15) чигре изнад равномерно намагнетисаног диска за различите вредности скалиране масе.

За реалистичнији модел магнетне базе може се узети равномерно намагнетисан диск са ненамагнетисаном централном рупом полупречника w . Једначина (4.13) даје:

$$\phi_0(z) = 2\pi\rho \frac{z}{\sqrt{w^2 + z^2}} - 8\rho \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{2(a^2 + z^2)}}\right)$$

За Левитрон бажи $w/a \approx \frac{1}{4}$. Из анализе стабилности коришћењем (12) следи да чигра може да левитира у доста уској области:

$$3.976 < \frac{z}{w} < 4.360$$

Маса чигре мора пажљиво бити одабрана тако да решење (4.11) лежи у стабилном интервалу. Из (4.11), промена равнотежне висине $d\zeta$ зависи од промене масе:

$$d\zeta = -\frac{dm}{m} \left| \frac{\phi_2}{\phi_3} \right|$$

У стабилном интервалу фактор $|\phi_2/\phi_3|$ узима вредности од бесконачности до најмање вредности која је за $w/a \approx \frac{1}{4}$ једнака 7.05, док је вредност на средини интервала 12.2. За тегове који долазе уз Левитрон dm/m је у области од 0.003 до 0.06. Тиме је ефекат додавања најлакшег тега приближно $d\zeta \sim 0.04$ док је за најтежи тег $d\zeta \sim 0.7$.

4.4 Геометријски магнетизам

Адијабатска претпоставка која је искоришћена (4.5) и прва пост-адијабатска корекција која ће бити описана у овом делу може се објаснити генералном теоријом али ми ћмо дати извођење везано за левитрон.

Кретање чигре је одређено гравитационим и магнетним силама које делују на њега. Сила која делује је:

$$\mathbf{F} \equiv -mge_z + \mathbf{F}_M = -mge_z + \nabla\mu(t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Овде је e_z јединични вектор који показује на горе. Поделићемо μ на компоненте паралелне и нормалне на поље B :

$$\mu(t) = \mu_B \mathbf{b}(t) + \mu_{\perp} \quad (4.17)$$

Ово омогућава да се магнетна сила напише овако:

$$\mathbf{F}_M \equiv \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_G = \mu_B \nabla B(\mathbf{r}) + \mu_{\perp}(\mathbf{t}) \cdot \nabla B(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

\mathbf{F}_A и \mathbf{F}_G означавају „адијабатски“ и „геометријски“ део силе (појмови који ће касније бити објашњени) и сада ћемо да дискутујемо о усредњењу ових сила по времену уз претпоставку да је прецесија брза.

Уз претпоставку да је окретање чигре брзо, μ задовољава исту једначину кретања (4.4) као и S , тако да уз (4.17) даје:

$$\dot{\mu} = \dot{\mu}_B \mathbf{b} + \mu_B \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mu}_{\perp} = \Omega(t) \mathbf{b}(t) \times \mu_{\perp} \quad (4.19)$$

Адијабатска процедура најнижег реда јесте да се прецесија око правца поља $\mathbf{b}(t)$ сматра брзом и да се просечна вредност μ_{\perp} сматра нулом. Али ово не може бити потпуно тачно, како се види из специјалног случаја када је μ на почетку паралелно са \mathbf{b} . Онда би последњи члан у (4.5) био нула и остао би такав ако би μ било потпуно повезано са \mathbf{b} . Због тога морамо бити пажљиви и дозволити да прецесија буде око правца блиском али не и истом са $\mathbf{b}(t)$.

Следећа апроксимација је да усредњена брзина прецесије $\dot{\mu}_{\perp}$ може да се постави на нулу али не и μ_{\perp} . У овој апроксимацији једначина (4.19) даје:

$$\dot{\mu}_B \approx 0 \text{ и } \mu_{\perp} \approx -\frac{\mu_B}{\Omega} \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}} \quad (4.20)$$

Прва једначина представља одржање адијабатске инваријанте, тако да је \mathbf{F}_A стварно адијабатска сила најнижег реда која може да се добије из (4.5) што води до услова за стабилност изведених у 4.2 и 4.3.

Друга једначина у (20) даје:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{\mu_B}{\Omega} (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \cdot \nabla B(\mathbf{r}) = \frac{S_B}{B} (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \cdot \nabla B(\mathbf{r})$$

Овде је искоришћена једначина (4.4) и апроксимација брзе чигре да је S паралелно са μ и да је $S_B \equiv S \cdot B$.

Промена \mathbf{b} је изазвана кретањем чигре кроз нехомогено поље тако да је:

$$\dot{\mathbf{b}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r})$$

Тиме пост-адијабатска сила F_G зависи и од брзине и од положаја чигре:

$$F_G = \frac{S_B}{B^3} [\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot \nabla B(\mathbf{r})$$

Уз мало векторске алгебре нам омогућава да се претходна једначина напише у облику:

$$F_G = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_G(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

где је $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и ефективно магнетно поље $\mathbf{B}_G(\mathbf{r})$ зависи од компонената поља \mathbf{B} као:

$$\mathbf{B}_G = -\frac{S_B}{B^3} (B_x \nabla B_y \times B_z + B_y \nabla B_z \times B_x + B_z \nabla B_x \times B_y) \quad (4.22)$$

Сила F_G назива геометријски магнетизам. Она је „магнетна“ јер има исту зависност од брзине као и Лоренцова сила, тј. као да чигра носи наелектрисање које одговара пољу \mathbf{B}_G . Она је „геометријска“ јер флуks поља \mathbf{B}_G у квантној механици даје геометријску квантно механичку фазу. Формула (4.22) се појавила у раду Берија (1986.) који је проучавао геометријску фазу квантних спинова.

Сада ћемо описати хиерархију магнетних реакција које делују на ротирајућу чигру. У извођењу силе геометријског магнетизма, промена S (прецесија) је узета да је брза тј. да је подређена промени споро мењајуће променљиве \mathbf{r} и да S магнетно реагује са \mathbf{r} . Међутим Бери и Робинс су показали да се и сама прецесија може узети као геометријска, јер $S(t)$ тј. кретање осе чигре је споро у односу на ротацију чигре око своје осе тј. S је подређено промени брзине ротације.

4.5 Геометријско проширење стабилности

Уз анализу из претходног одељка сила која делује на чигру је:

$$m\dot{\mathbf{r}} = -mge_z + \mu_B \nabla B(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_G(\mathbf{r})$$

Из једначина (10) и (18) добијамо:

$$\nabla B = \text{sgn}\phi_1 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\phi_2^2}{\phi_1} - 2\phi_3 \right) \mathbf{R} + \phi_2 \mathbf{e}_z \right]$$

За геометријско магнетно поље (22) из (8) добијамо:

$$\mathbf{B}_G = S_B \text{sgn}\phi_1 \frac{\phi_2^2}{4\phi_1^2} \mathbf{e}_z$$

Видимо да геометријски магнетизам не утиче на вертикално кретање, које зависи само од гравитације и силе F_A , што је објашњено у одељцима 4.2 и 4.3. Ипак сила геометријског магнетизма утиче на вертикално кретање које је дато следећом диференцијалном једначином:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{g}{4} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} - \frac{2\phi_3}{\phi_2} \right) \mathbf{R} + S_B \operatorname{sgn} \phi_1 \frac{\phi_2^2}{4m\phi_1} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{e}_z \quad (4.23)$$

Представљањем ове једначине у облику $\ddot{u} = \alpha(z)u + i\beta(z)\dot{u}$ где је $u(t) \equiv x(t) + iy(t)$ добијамо опште решење једначине у облику:

$$u(t) = u_+ e^{i\omega_+(z)t} + u_- e^{i\omega_-(z)t}$$

Где је:

$$\omega_{(\pm)}(z) = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \right)$$

Да би левитација била стабилна $\omega_{(\pm)}$ мора бити реално тј. $\beta^2 - 4\alpha > 0$ из чега користећи (23) добијамо услов:

$$\frac{S_B^2}{m^2 g} > G(z) \equiv 32 \left| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right|^2 \left(\frac{\phi_1 \phi_3}{\phi_2^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.24)$$

Видимо да ће овај услов бити испуњен ако је (4.12ц) задовољено јер је онда $G(z)$ негативно. Ако је $G(z)$ позитивно услов (4.12ц) је нарушен, рецимо то се дешава кад је $\zeta > \sqrt{\frac{2}{5}}$ за кружну базу. То значи да постоји нека мало другачија зона стабилности када укључимо ефекат геометријског магнетизма. Да би проценили последњи члан у релацији (4.24) користећемо израчунат потенцијал (4.14) и означимо фреквенцију ротације чигре са ν , радијус окретања са d и полупречник магнетне основе са a . Онда после замене у (4.24) добијамо услов за стабилност:

$$\zeta - \sqrt{\frac{2}{5}} < \frac{81\pi^2 \nu^2 d^4}{680ga^3}$$

За Левитрон, $a \approx 5\text{cm}$, $d \approx 1.13\text{cm}$ и за вртење чигре руком $\nu \sim 20\text{Hz}$ добијамо $\zeta - \sqrt{\frac{2}{5}} < 0.0062$ што представља повећање стабилне зоне око 5% у зони статичне стабилности $\frac{1}{2} < \frac{\zeta}{a} < \sqrt{\frac{2}{5}}$. Ако би успели да чигру заврtimo брже добили би веће повећање зоне стабилности. За $\nu = 20\text{Hz}$ повећање стабилне зоне би било око 20% у односу на статичну зону стабилности (4.15). Ако би се чигра вртела фреквенцијом $\nu = 100\text{Hz}$ зона стабилности би се удвостручила, али би се чигра дестабилизовала због других разлога (одељак 4.6).

4.6 Адијабатски услови

И у извођењу услова статичке стабилности у одељку 4.2 и у извођењу силе геометријског магнетизма у 4.4 користили смо одређене претпоставке које смо назвали адијабатски услови. У овом делу ћемо видети шта ти услови значе и које последице носе са собом.

Пошто су сви моменти инерције кретања чигре приближно исти, услов да је ротација чигре брза (оса ротације паралелна угаоној брзини и ротација усмерена дуж осе симетрије) постаје:

$$2\pi\nu \gg |\Omega|$$

Где је ν фреквенција ротације чигре, а Ω је угаона брзина прецесије.

Користећи (4) и (11) претходни услов можемо написати у зависности од магнетног потенцијала:

$$\nu \gg \nu_{min} = \frac{1}{2\pi d} \sqrt{g \left| \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right|}$$

У зависности од ν_{min} фреквенција прецесије је:

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\nu_{min}^2}{\nu}$$

Адијабатски услов је тај да је прецесија много бржа од брзине промене \mathbf{b} тј.:

$$|\Omega| \gg |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r})|$$

Из одељка 4.2 добијамо да је $\mathbf{b} = \left\{ x \frac{\Phi_2}{2|\Phi_1|}, y \frac{\Phi_2}{2|\Phi_1|}, -sqn\Phi_1 \right\}$ претходни услов зависи само од нормалне брзине v_{\perp} чигре. Следи да адијабатски услов постаје:

$$v_{\perp} \gg \frac{2\sqrt{g}}{d} \left(\left| \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right| \right)^{3/2} \frac{\nu_{min}}{\nu}$$

Такође можемо добити и осцилације малих вертикалних осцилација чигре из прве формуле у одељку 4.5:

$$v_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \left| \frac{\Phi_3}{\Phi_2} \right|} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(4\zeta^2 - 1)}{a\zeta(\zeta^2 + 1)}}$$

Где последња једнакост важи за намагнетисану базу у облику круга полупречника a .

За процену претходних величина узећемо вредности $a \approx 5\text{cm}$, $d \approx 1.13\text{cm}$ и $v \sim 20\text{Hz}$. Ово нам даје $v_{min} \sim 8.7\text{Hz}$ што је мање од брзине окретања руком док за фреквенцију прецесије добијамо $\frac{\Omega}{2\pi} = 3.8\text{Hz}$. Из овога следи да је Левитрон уствари брза чигра тј. коришћене претпоставке су добре. Проверавањем вредности v_z за тачку најстабилнијег кретања ($\zeta_{SC} = 0.565373$) добијамо $v_z \approx 1.4\text{Hz}$ што је неколико пута мање од брзине прецесије. Видимо да су адијабатски услови одржани.

Али ако је ротација чигре бржа, адијабатски услови би били нарушени јер би онда и брзина прецесије била мања што би значило да прецесија више не би могла да буде око $\mathbf{b}(r)$.

5. Закључак

У овом раду смо приказали две врсте левитација: левитацију дијамагнета и левитацију ротирајуће чигре изнад стално намагнетисане базе (играчка Левитрон). Показали смо да су упркос давно постављеној Ерншоувој теореме неке врсте левитације могуће и показали смо зашто су оне могуће. За обе врсте левитације смо извели услове за стабилност које поље које их одржава мора да задовољи док смо се код ротације Левитрона мало више позабавили теоријом геометријског магнетизма уз коју смо извели мало другачије услове за стабилност и брзине окретања чигре. Такође смо представили приказ експеримената дијамагнетне левитације које су вршили Бери и Гејм и дали преглед могућих примена ове врсте левитације.

Желео бих да се захвалим мом ментору Филипу Вукајловићу на помоћи око израде овог рада. Такође би се захвалио мојој професорки физике Наташи Каделбург на знању и пажњи које ми је пружила током мог школовања у Математичкој гимназији. И на крају захваљујем се и мојим тренутним професорима физике Душку Латасу и Ивану Станићу чија ми је помоћ много значила.

6. Литература

- [1] M V Berry and A K Geim, Of flying frogs and levitrons, 1997 *Eur. J. Phys.* **18** 307
- [2] M V Berry, The Levitron: an adiabatic trap for spins, *Proc. R. Soc. Lond. A* (1996) **452**, 1207-1220
- [3] Earnshaw S 1842: "On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether", *Trans. Camb. Phil. Soc.* **7** 97–112
- [4] Scott W T 1959: "Who was Earnshaw?", *Am. J. Phys.* **27** 418–9

Додатак: Заједничка изјава Мајкла Берија и Андреја Гејма о прихватању шаљиве Нобелове награде за физику 2000. године

Press release,

The 2000 Ig Nobel Prize in Physics

shared by Andrey Geim and Michael Berry

The Physics of Flying Frogs

We are pleased to accept the Ig prize because we have always considered it a duty to make physics more understandable and bring it closer to nonscientists. We think the prize acknowledges our contribution in this direction.

Although some people tend to judge the quality of science by the seriousness of researchers doing it, there are lots of examples where good science has been fun - and science does not have to be boring to be good. The original idea of the founders of the Ig prize was exactly to support the above statement and, in the last years, Ig Nobel nominations have shown a clear tendency to follow this line. By accepting the Ig prize, we are supporting this tendency. We are glad to be associated with previous winners such as Alan Sokal and Len Fisher.

Our story is amusing on the surface, but also contains some unappreciated knowledge about magnetism. A careful observer usually finds this out very quickly. The flying frog aroused interest in magnetism in very different people - scientists and nonscientists - and their reaction was always enthusiastic. Therefore, we want to accept this prize also on behalf of the hundreds who wrote to us with their ideas and asking for details of the magnet setup. The enquiries came from engineers who wanted to use levitation for everything from waste recycling and materials processing to levitating sports shoes and jewellery in shop windows; from our physicist colleagues, some of whom admitted that after learning about the frog they finally understood some of their old results or artefacts; from chemists and biologists who did not want to wait for a space shuttle and realized they could do microgravity experiments in a magnet; from servicemen to pensioners and from prisoners to priests who wrote that they had no any science education but still wanted to learn about the magic of magnetism and use it. Sometimes, their ideas were bright and unexpected, sometimes goofy, sometimes ridiculous or even mad but always creative.

We want to thank all those schoolteachers and academics who asked us for the picture of the flying frog to teach magnetism in their classes. Even more rewarding were letters from children all over the world who asked for advice about school science projects they wanted to design for magnetic levitation or who just wanted to be sent a big magnet or who wrote "I am 9 years old and want to become a scientist".

Levitation has been our scientific hobby for the last few years. It consumed a lot of our energy and required long working hours, especially to answer all those enquiries. Even so, we have never regretted this episode, and regard our efforts as vindicated by the public interest they have aroused.

Let there be more science with a smile!